ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Содержание

Постановка вопроса.

Постановка вопроса и наводящие соображения, конечно, обсуждались в реальной лекции, но здесь мы это опустим, поскольку соответствующий материал можно прочитать в параграфе 5 главы VIII.

Мы продемонстрируем здесь иной подход к доказательству теоремы о неявной функции, отличный и независимый от изложенного в параграфе 5 главы VIII. Он, несмотря на идейную простоту, красоту и общность, предполагает несколько более продвинутую аудиторию слушателей, которые уже ознакомлены с некоторыми общематематическими понятиями, изложенными в начале второй части учебника. Во всяком случае именно такие сведения позволяют оценить реальную общность метода, который, кстати, без потери общности, можно демонстрировать уже на простейших наглядных примерах в знакомых всем пространствах.

Некоторые напоминания о численных методах решения уравнений.

Фиксировав в соотношении $F(x, y) = 0$ одну из переменных, мы получаем уравнение относительно другой, поэтому сначала полезно вспомнить, как решают уравнение $f(x) = 0$.

1) В зависимости от свойств функции f предлагаются и способы решения.

Например, если f — вещественнозначна, непрерывна и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значение разных знаков, то, мы знаем, что на этом отрезке есть по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$ и его можно искать последовательным делением отрезка. Разделив отрезок пополам, мы либо попадаем в корень, либо находим вдвое меньший отрезок, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Продолжая процесс деления, получим последовательность (концов отрезков), которая сходится к корню уравнения.

2) Если f — гладкая выпуклая функция, то следуя Ньютону, можно предложить значительно более эффективный в смысле скорости сходимости алгоритм отыскания единственного в этом случае корня.

Метод Ньютона или метод касательных состоит в следующем. Строим касательную в точке x_0, находим точку x_1, ее пересечения с осью абсцисс и, повторяя процесс, получаем рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n) \tag{1}$$

последовательность точек быстро сходящуюся к корню. (Оцените скорость сходимости. Получите соотношение $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, позволяющее искать положительный корень уравнения $x^2 - a = 0$, $a > 0$. Найдите $\sqrt{2}$ по этой формуле с нужной вам точностью и проследите сколько дополнительных верных знаков появляется на каждом шаге).

3) Соотношение (1) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{2}$$

где $g(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x)$. Тем самым отыскание корня уравнения $f(x)$ сводится к отысканию *неподвижной точки* отображения g, т.е. такой точки, что

$$x = g(x) \tag{3}$$

Эта редукция, как нам известно, относится не только к методу Ньютона. В самом деле, уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $\lambda f(x) = 0$, (если существует λ^{-1}), а последнее равносильно уравнению $x = x + \lambda f(x)$. Полагая $g(x) = x + \lambda f(x)$ (здесь λ может быть и переменной величиной), приходим к уравнению (3).

Процесс решения уравнения (3), т.е. отыскания неподвижной точки отображения g в соответствии с рекуррентной формулой (2), когда найденное на предыдущем шаге значение функции становится ее аргументом на следующем шаге, как мы уже знаем, называется *итерационным процессом* или *методом итераций*. Этот циклический процесс удобен для реализации на компьютере.

Если итерационный процесс (2) ведется в области, где $|g'(x)| \leq q < 1$, то последовательность

$$\begin{array}{l} x_0, \\ x_1 = g(x_0), \\ x_2 = g(x_1) = g^2(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n+1} = g(x_n) = g^n(x_0), \end{array}$$

всегда оказывается фундаментальной (последовательностью Коши). В самом деле, применяя теорему о конечном приращении, имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n|x_1 - x_0|, \tag{4}$$

откуда, применяя неравенство треугольника, находим

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\leq |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \leq \\ &\leq (q^n + \cdots + q^{n+m-1})|x_1 - x_0| \leq \tfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \end{aligned} \tag{5}$$

Полезно заметить, что при $m \to \infty$ из последнего неравенства получаем оценку

$$|x - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \tag{6}$$

уклонения x_n от неподвижной точки x.

Задача. Нарисуйте несколько вариантов кривых $y = g(x)$, пересекающих прямую $y = x$, и изобразите диаграмму, имитирующую итерационный процесс $x_{n+1} = g(x_n)$ отыскания неподвижной точки.

Принцип неподвижной точки. Последние рассуждения (относящиеся к формулам (3)-(6)), очевидно, можно повторить в любом метрическом пространстве, в котором действует критерий Коши, т.е. где любая фундаментальная последовательность является сходящейся. Такие метрические пространства называются *полными метрическими пространствами.* Например $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство по отношению к стандартному расстоянию $d(x', x'') = |x' - x''|$ между точками $x', x'' \in \mathbb{R}$. Отрезок $I = \{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 1\}$ — также полное метрическое пространство относительно этой метрики. А если из $\mathbb{R}$ или из I удалить точку, то полученное метрическое пространство, очевидно, не будет полным.

Задача. 1. Проверьте полноту пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$.

2. Покажите, что замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X | d(a, x) \leq r\}$ радиуса r с центром $a \in X$ в полном метрическом пространстве (X, d) сам является полным метрическим пространством относительно индуцированной вложением $B \subset X$ метрики d.

Напомним еще следующее

Определение Отображение $g : X \to Y$ одного метрического пространства (X, d_X) в другое (Y, d_Y) называется *сжимающим*, если существует число $q \in [0, 1[$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$,

$$d_Y(g(x'), g(x'')) \leq q\ d_X(x', x'')$$

Например, если дифференцируемая функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что всюду $|g'(x)| \leq q < 1$, то по теореме в конечном приращении $|g(x') - g(x'')| \leq q|x' - x''|$ и g осуществляет сжимающее отображение. Это же можно сказать и по отношению к дифференцируемому отображению $g : B \to Y$, выпуклого подмножества B нормированного пространства X (например, шара $B \subset \mathbb{R}^n$) в нормированное пространство Y, если $\|g'(x)\| \leq q$ в любой точке $x \in B$.

Теперь мы можем сформулировать следующий *принцип неподвижной точки.*

> *Сжимающее отображение $g : X \to X$ полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку x.*
>
> *Эта точка может быть найдена итерационным процессом $x_{n+1} = g(x_n)$, начиная с любой точки $x_0 \in X$. Скорость сходимости и оценка погрешности приближения даются неравенством*

$$d(x, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{6'}$$

Доказательство этого утверждения было дано выше при выводе формул (4)-(6), где теперь вместо $|x' - x''|$ всюду надо писать $d(x', x'')$.

Чтобы оценить пользу и масштаб действия сделанного обобщения рассмотрим следующий важный пример.

Пример. Ищется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, перепишем задачу в виде следующего интегрального уравнения относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{7}$$

Справа стоит некоторое преобразование g, которое делается над функцией $y(x)$ и мы ищем неподвижную "точку— функцию преобразования g.

Пусть, например, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$, а $y_0 = y(t)$. Тогда речь идет о решении уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$, а (7) принимает вид

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt. \tag{8}$$

Проведем итерационный процесс, начиная, положим, с функции $y_0(x) \equiv 0$. При этом последовательно получаем

$$\begin{aligned}
y_1(x) &\equiv 1, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + x, \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x y_2(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \\
&\vdots \\
y_n(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Видно, что мы идем к функции $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$.

Задача. Покажите, что если $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le M\|y_1 - y_2\|$, то в окрестности точки x_0 итерационный процесс применим и в случае общего уравнения (7).

Именно так Пикар (Emile Picard , 1856-1941) искал решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$, с начальным условием $y(x_0) = y_0$, как неподвижную точку преобразования (7).

Банах (Stephane Banach, 1882-1945) сформулировал принцип неподвижной точки в приведенной выше абстрактной форме, в которой он часто называется *принципом Банаха неподвижной точки*, или *принципом Пикара-Банаха.* Истоки его, однако, как мы видели, можно связывать и с Ньютоном.

Теорема о неявной функции.

Формулировка теоремы. Вернемся теперь к основному объекту нашего рассмотрения и покажем, что справедлива следующая *теорема о неявной функции.*

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства (например, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ или, даже, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), причем Y — полное пространство относительно метрики, индуцированной нормой.*

Пусть $F: W \to Z$ — отображение, определенное в окрестности W точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, непрерывное в (x_0, y_0) вместе с частной производной $F'_y(x, y)$, которая предполагается существующей в W.

Если $F(x_0, y_0) = 0$ и при этом существует $(F'_y(x_0, y_0))^{-1}$ (и $\|(F'_y(x_0, y_0))^{-1}\| < \infty$), то найдутся окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V = V(y_0)$ точки y_0 в Y и такая функция $f: U \to V$, непрерывная в x_0, что $U \times V \subset W$ и

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } U \times V) \Longleftrightarrow (y = f(x),\ x \in U) \tag{9}$$

Короче, при условиях теоремы заданное соотношением $F(x, y) = 0$ множество в пределах окрестности $U \times V$ является графиком функции $y = f(x)$.

Доказательство существования неявной функции.

Доказательство. Без ограничения общности и для сокращения записи будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$, чего всегда можно добиться перейдя к новым переменным $x - x_0$ и $y - y_0$.

При фиксированном x будем решать уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y. Решение будем искать как неподвижную точку отображения

$$g_x(y) = y - (F'_y(0, 0))^{-1} F(x, y) \tag{10}$$

— это упрощенный вариант формулы Ньютона (1), когда коэффициент λ (см. абзац после формулы (3)) постоянен. Непосредственно видно, что $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow g_x(y) = y$.

Отображение (10) является сжимающим, если x и y близки к 0 в X и Y. В самом деле

$$\frac{dg_x}{dy}(y) = E - (F'_y(0, 0))^{-1} F'_y(x, y) \tag{11}$$

Здесь E — тождественное (единичное) отображение, а поскольку $F'_y(x,y)$ непрерывно в точке (0,0), то найдется число $\Delta \in \mathbb{R}$ такое, что при $\|x\| < \Delta$ и $\|y\| < \Delta$

$$\|\frac{dg_x}{dy}\| < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Заметим, наконец, что при любом $\varepsilon \in]0,\Delta[$ найдется $\delta \in]0,\Delta[$ такое, что если $\|x\| < \delta$, то отображение g_x переводит отрезок (шарик) $\|y\| \le \varepsilon$ в себя.

Действительно, ведь $F(0,0) = 0$, значит, в силу (10), и $g_0(0) = 0$. Ввиду непрерывности F в точке (0,0) из (10) следует, что найдется число $\delta \in]0,\Delta[$ такое, что $\|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Итак, при $\|x\| < \delta$ отображение $g_x : \ B(\varepsilon) \to Y$ отрезка (шара) $B(\varepsilon) = \{y \in Y | \|y\| \le \varepsilon\}$ смещает его центр не более чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$, при этом, в силу (12), сжимая $B(\varepsilon)$ по крайней мере вдвое. Значит, $g_x(B(\varepsilon)) \subset B(\varepsilon)$ при $\|x\| < \delta$.

По условию Y — полное пространство, поэтому и $B(\varepsilon) \subset Y$ тоже полное метрическое пространство (относительно индуцированной метрики).

Тогда, в силу принципа неподвижной точки, найдется, и притом единственная, точка $y = f(x) \in B(\varepsilon)$, неподвижная при отображении $g_x : B(\varepsilon) \to B(\varepsilon)$.

Тем самым при любом x таком, что $\|x\| < \delta$, мы нашли, и притом единственное в пределах $B(\varepsilon)$ значение $y = f(x)$ ($\|f(x)\| < \varepsilon$) такое, что $F(x, f(x)) = 0$.

(Сечение области $P = \{(x,y) \in X \times Y | \|x\| < \delta, \ \|y\| < \varepsilon\}$, проходящее через точку $(x,0)$, — это отрезок (шарик) $B(\varepsilon)$, в котором и находится соответствующая неподвижная точка $y = f(x)$).

Итак, показано, что

$$(F(x,y) = 0 \text{ при } \ \|x\| < \delta \text{ и } \ \|y\| < \varepsilon) \Longleftrightarrow (y = f(x), \text{ где } \ \|x\| < \delta) \tag{13}$$

Заметим, что мы не только получили соотношение (9), но, в силу конструкции, по любому $\varepsilon \in]0,\Delta[$ умеем подбирать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось (13). Поскольку функция f уже найдена и фиксирована, это означает и то, что $f(0) = 0$, и то, что f *непрерывна при* $x = 0$.

$\square$

Доказанную теорему можно рассматривать как теорему существования неявной функции $y = f(x)$.

Посмотрим теперь какие свойства функции F и как наследуются функцией f.

Непрерывность неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F, F'_y непрерывны не только в точке (x_0, y_0), но и в некоторой ее окрестности, то и неявная функция f непрерывна в некоторой окрестности x_0.

Доказательство. Действительно, в этом случае условия теоремы окажутся выполненными во всех близких к (x_0, y_0) точках множества $F(x, y) = 0$ и каждую из них можно было бы рассматривать как исходную (x_o, y_0). Функция же f уже найдена и фиксирована.

Внимание! Вспомните задачу: если отображение $A \to A^{-1}$ (например, для матриц A) определено в A, то определено и в окрестности A. □

Дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то неявная функция f дифференцируема в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0) \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая дифференцируемость F в точке (x_0, y_0), можно написать, что

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) =$$
$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|).$$

Полагая для упрощения записи $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и считая, что мы перемещаемся только вдоль кривой $y = f(x)$, получаем

$$0 = F'_x(0, 0)x + F'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|).$$

или

$$y = -(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)x - (F'_y(0, 0))^{-1} o(|x| + |y|). \tag{15}$$

Поскольку $y = f(x) = f(x) - f(0)$, то формула (14) будет оправдана, если мы покажем, что при $x \to 0$ второй член в правой части (15) есть $o(x)$.

Но

$$|(F'_y(0,0))^{-1}o(|x|+|y|)| \le \|(F'_y(0,0))^{-1}\||o(|x|+|y|)| = o(|x|+|y|).$$

Далее,

$$\|-(F'_y(0,0))^{-1}F'_x(0,0)\| \le \|(F'_y(0,0))^{-1}\| \cdot \|F'_x(0,0)\| = a < \infty,$$

поэтому из (15) получаем, что $|y| \le a|x| + \alpha(|x|+|y|)$, где $y = f(x) \to 0$ и $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Значит,

$$|y| \le \frac{a+\alpha}{1-\alpha}|x| < 2a|x|$$

при x, достаточно близких к 0. Учитывая это, из (15) получаем, что при $x \to 0$

$$f(x) = -(F'_y(0,0))^{-1}F'_x(0,0)x + o(x).$$

А это с учетом $f(0) = 0$, дает (14). □

Непрерывная дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F'_x и F'_y определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то и неявная функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Короче говоря, если $F \in C^{(1)}$, то и $f \in C^{(1)}$.

Доказательство. В этом случае условия дифференцируемости f и формула (14) оказываются выполнены не только в (x_0, y_0), но и во всех точках «кривой»$F(x,y) = 0$, близких к (x_0, y_0). (См. выше предостерегающее *«Внимание!»*). Тогда в некоторой окрестности точки x_0 в соответствии с формулой (14)

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1}F'_x(x, f(x)) \qquad (14')$$

откуда видно, что f' — непрерывна.

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно. □

Высшие производные неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F принадлежит классу $C^{(k)}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то и f принадлежит классу $C^{(k)}$ в окрестности x_0.

Доказательство. Пусть, например, $F \in C^{(2)}$. Поскольку $f \in C^{(1)}$, то правую часть равенства $(14')$ можно продифференцировать в соответствии с правилом дифференцирования композиции функций. Получается формула для $f''(x)$, из которой следует непрерывность $f''(x)$.

Более того, как в формуле $(14')$ для $f'(x)$ справа участвуют первые частные производные F и сама функция f (но не f'), так и в формуле для $f''(x)$ участвуют вторые частные производные F и функции f, f' (но не f'').

Значит, если $F \in C^{(3)}$, то $f''(x)$ снова можно дифференцировать и мы снова приходим к формуле, теперь уже для $f'''(x)$, в которой участвуют третьи частные производные F, а также производные функции f (f, f', f'') только меньшего порядка.

По индукции получаем то, что и утверждалось. $\square$

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ дифференцируемо и даже бесконечно дифференцируемо.

Задача. 1. Найдите $f''(x)$ (т.е. выпишите формулу для вычисления $f''(x)(h_1, h_2)$ при заданных векторах смещения h_1, h_2).

2. Как выглядит (упрощается) формула для $f''(x)$ в случае, когда x, y и $z = F(x, y)$ — числовые вещественные или комплексные переменные?

Задача. (*Метод неопределенных коэффициентов*). Зная первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора функции F, найдите первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора неявной функции f.

Задача. 1. Запишите в координатной форме формулировку теоремы о неявной функции для случая $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, когда $m = n = 1$ и когда $n > 1$.

2. Пусть $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m > n)$ линейное отображение максимального ранга ($= n$). Какова размерность подпространства $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m$ и какова его коразмерность? Пусть теперь $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m > n)$ произвольное гладкое отображение, $F(0) = 0$ и $\mathrm{rang} F'(x) = n$. Ответьте на те же вопросы ($\dim F^{-1}(0) =?$ $\mathrm{codim} F^{-1}(0) =?$) в отношении множества $F^{-1}(0)$.